⟨Lycée Laymoune⟩ Prof: يزيغ

2ème année Semestre.I — COMPTABILITÉ — 2021 - 2022

Série n° 1 : exercices de Math.

EX.1 1°) Déterminer D_f et D_g avec :

$$f(x) = \sqrt{x+2} + \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \frac{x^4 - x}{x^2 - 4x + 3}$$

2°) Etudier la variation de la fct h avec : $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

EX.2 on considère la fonction h avec : $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

1°) Déterminer : $h(]-\infty ; 1]$; $h([1,3[)$; $h([3+\infty[)$

2°) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution dans $]1;3[$.

EX.3 Soit f une fonction continue donnée par son tableau de variation :

x	$-\infty$		-3		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$					
f	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$				
			2				-2						

1°/ Déterminer D_f

2°/ Résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle : $]0;2]$.

3°/ Déterminer le nombre de solution de l'éq $f(x) = 0$ sur D_f

4°/ Déterminer les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ dans D_f.

5°/ Determiner $f(]-3;0[)$; $f([2;+\infty[$ $f(]0;2])$.

6°/ Déterminer la valeur minimale de f sur D_f.

7°/ Donner le tableau de signe de $f(x)$ sur D_f.

EX.4 Soit f la fct définie sur $I =]2;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x+3}{2x-4}$

1°/ calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2^>} f(x)$

2°/ Vérifier que : $(\forall x \in I)$; $(x) = \frac{-10}{(2x-4)^2}$

3°/ Dresser le tableau de variation de f sur I. (I على f الدالة تغيرات جدول ضع)

4°/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J.

5°/ Déterminer J et la variation de f^{-1}.

6°/ Calculer $\lim\limits_{x \to 1/2^>} f^{-1}(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x)$

7°/ Vérifier que : $(\forall x \in J)$: $f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{2x-1}$

Devoir Maison n° 1

Semestre.1

EXERCICE.1

1°) Mq l'équation : $2x^5 + 2x^3 + 2x - 5 = 0$ admet une solution unique dans $]0;1[$

2°) Soit f la fct : $x \mapsto (x^3 - 4x)\sqrt{x^2+1}$

Déterminer $f'(x)$

EXERCICE.2

On considère la fct : $f : x \mapsto \frac{x-4}{x+1}$ et $I =]-1;+\infty[$

1°/ Donner le tableau de variation de f sur I.

2°/ Determiner : $f(]-1;0])$ et $f([0;+\infty[)$

3°/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$.

4°/ Dresser le tableau de variation de f^{-1} sur J.

5°/ Déterminer $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

* * * *

— * fin * —

Scanné avec CamScanner

Correction de la série n° 1

EX. 1 1°/ $f(x) = \sqrt{x+2} + \frac{1}{x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} ; \ x+2 \geqslant 0\}$

on a : $x+2 \geqslant 0 \iff x \geqslant -2$

$\iff x \in [-2; +\infty[$

donc : $\boxed{D_f = [-2; +\infty[}$

$g(x) = \dfrac{x^4 - x}{x^2 - 4x + 3}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / \ x^2 - 4x + 3 \neq 0\}$

on a : $x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 3 = 4$

$\Delta > 0$ donc deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4) - 2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4) + 2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

donc :

$x^2 - 4x + 3 \neq 0 \iff (x \neq 1 \text{ et } x \neq 3)$

Càd : $\boxed{D_g = \mathbb{R} - \{1; 3\}}$

2°/ $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

$h'(x) = \frac{1}{3} \times 3 \times x^2 - 2 \times 2x^1 + 3 - 0$

$= x^2 - 4x + 3$

on a déjà calculer les solutions de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = 4 > 0$; $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$

donc le tableau de variation de la fct h :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
h	$-\infty$	↗	$\frac{1}{3}$	↘	-1	↗	$+\infty$

avec : $h(1) = \frac{1}{3} \times 1^3 - 2 \times 1^2 + 3 \times 1 - 1$

$= \frac{1}{3} - 2 + 3 - 1 = \boxed{\frac{1}{3}}$

$h(3) = \frac{1}{3} \times 3^3 - 2 \times 3^2 + 3 \times 3 - 1$

$= \frac{27}{3} - 18 + 9 - 1 = 9 - 18 + 9 - 1 = \boxed{-1}$

$\lim\limits_{-\infty} h = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{3}x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{+\infty} h = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3}x^3 = +\infty$

EX. 2

$h(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

1°) on utilise le tableau de variation de h [question : 2°) ex 1)]

h continue et ↗ sur $]-\infty; 1]$ donc :

$h(]-\infty; 1]) =]\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) ; \ h(1)]$

$= \boxed{]-\infty; \frac{1}{3}]}$

h continue et ↘ sur $[1; 3[$ donc :

$h([1; 3[) =]\lim\limits_{x \to 3^-} h(x) ; \ h(1)]$

$= \boxed{]-1; \frac{1}{3}]}$

h continue et ↗ sur $[3; +\infty[$ donc :

$h([3; +\infty[) = [h(3) ; \lim\limits_{x \to +\infty} h(x)[$

$= \boxed{[-1; +\infty[}$

2°) • h est continue sur $[1; 3]$

•• h est strictement ↘ sur $[1; 3]$ (d'après le tableau de variation)

••• $h(1) \times h(3) = \frac{1}{3} \times (-1) < 0$

d'après T.V.I l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution dans $]1; 3[$.

Scanné avec CamScanner

EX.3

x	$-\infty$		-3		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$			0	$+$	‖		$-$	0	$+$				
f	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	$+\infty$

1°/ f est définie sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 (car : $f(0)$ n'existe pas dans le tableau)

donc $D_f = \boxed{\mathbb{R} - \{0\}} = \mathbb{R}^*$

$=]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

2°/ on a : $f(1) = 0$ et $1 \in]0; 2]$

l'éq $f(x) = 0$ admet la solution 1 sur $]0; 2]$. (Remarque : il n'y a pas d'autres solutions car f est strictement ↘ sur $]0; 2]$)

3°/ sur $]-\infty; 0[$ on a : $f(x) \geqslant 2$

donc $f(x) \neq 0$ sur $]-\infty; 0[$

sur $]0; +\infty[$ il y a deux solutions :

$f(1) = 0$ et $f(3) = 0$

donc sur $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

il y a : **deux solutions.**

4°/ Les solutions de $f(x) \leqslant 0$:

- $f(x) \leqslant 0$ n'admet pas de solution dans $]-\infty; 0[$ car $f(x) \geqslant 2$ (donc $f(x) > 0$)

dans $]0; +\infty[$: on a :

$f(x) \leqslant 0 \iff x \in [1; 3]$

donc l'ensemble des solutions sur D_f :

$[1; 3]$

5°/ f est continue et str ↗ sur $]-3; 0[$ donc :

$f(]-3; 0[) =]\lim\limits_{x \to -3} f(x); \lim\limits_{x \to 0} f(x)[$

$(x \to -3 : >)$ $(x \to 0 : <)$

$= \boxed{]2; +\infty[}$

f est continue et str ↗ sur $[2; +\infty[$

$f([2; +\infty[) = [f(2); \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$

$= \boxed{[-2; +\infty[}$

f continue et str ↘ sur $]0; 2]$ donc :

$f(]0; 2]) = [f(2); \lim\limits_{x \to 0} f(x)[$ $(x \to 0 : >)$

$= \boxed{[-2; +\infty[}$

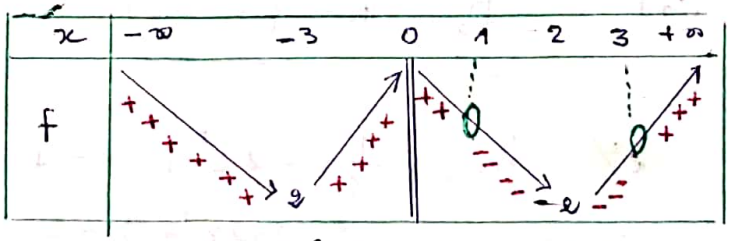
6°/ d'après le tableau :

$(\forall x \in D_f) : f(2) \leqslant f(x)$

donc $f(2) = -2$ est la valeur minimale de f sur D_f.

7°/ tableau de signe de f :

on utilise le tableau de variation :



donc : le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+$		‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Scanné avec CamScanner

(EX.4) $f(x)=\dfrac{x+3}{2x-4}$; $I=]2;+\infty[$

1°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 2^{>}} f(x)=\dfrac{"2+3"}{4-4}=\dfrac{"5"}{0}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$	0	$+$	

$2x-4=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{4}{2}=2$

$x>2$

on a : $\lim\limits_{x\to 2^{>}}(2x-4)=0^{+}$

donc : $\lim\limits_{x\to 2^{>}} f(x)=\dfrac{"5"}{0^{+}}=+\infty$

2°/ $(\forall x\in I)\quad f'(x)=\left(\dfrac{x+3}{2x-4}\right)'$

$=\dfrac{(x+3)'(2x-4)-(x+3)(2x-4)'}{(2x-4)^2}$

$=\dfrac{1\times(2x-4)-(x+3)\times 2}{(2x-4)^2}$

$=\dfrac{2x-4-2x-6}{(2x-4)^2}=\dfrac{-10}{(2x-4)^2}$

3°/ f est strictement décroissante sur I ; car : $f'(x)=\dfrac{-10}{(2x-4)^2}<0$

donc :

x	2		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$

4°/ f est définie sur I donc

- f est continue sur I

(rappel : une fct rationnelle est continue sur son domaine de définition)

- et on a f est strictement ↘ sur I donc f admet une fct réciproque f^{-1} définie sur $J=f(I)$.

5°/ $J=f(I)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ ;\ \lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)\right[$

$$\boxed{J=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[}$$

Variation de f^{-1} :

f est strictement ↘ sur I

donc f^{-1} est strictement ↘ sur J

6°/ on a : $f(I)=J$

donc : $f^{-1}(f(I))=f^{-1}(J)$

$I=f^{-1}(J)=f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right)$

$]2;+\infty[=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)\ ;\ \lim\limits_{x\to 1/2^{>}} f^{-1}(x)\right[$

donc : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=2\\ \lim\limits_{x\to 1/2^{>}} f^{-1}(x)=+\infty\end{cases}$

7°/ Soient $x\in\left]\frac{1}{2}+\infty\right[$; $y\in]2;+\infty[$

on a :

$f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow x=f(y)$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{y+3}{2y-4}$

$\Leftrightarrow x(2y-4)=y+3$

$\Leftrightarrow 2xy-4x=y+3$

$\Leftrightarrow y(2x-1)=4x+3$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{4x+3}{2x-1}$

donc :

$$(\forall x\in J)\quad f^{-1}(x)=\frac{4x+3}{2x-1}$$

Scanné avec CamScanner

Devoir maison n°1

EX.1 : 1°) posons :

$$f(x) = 2x^5 + 2x^3 + 2x - 5$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme)

donc :

- f est continue sur $[0;1]$
- $f'(x) = \underbrace{10x^4}_{\geq 0} + \underbrace{6x^2}_{\geq 0} + \underbrace{2}_{>0} > 0$

donc f est strictement ↗ sur $[0;1]$.

- $f(0) = -5 < 0$

$f(1) = 2+2+2-5 = 1 > 0$

donc : $f(0) \times f(1) < 0$

d'après T.V.I l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]0;1[$.

2°) $f(x) = (x^3 - 4x)\sqrt{x^2+1}$

rappel : $(uv)' = u'v + uv'$

$$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{(f)'}{2\sqrt{f}}$$

donc :

$$f'(x) = (x^3-4x)'\sqrt{x^2+1} + (x^3-4x)\left(\sqrt{x^2+1}\right)'$$

$$= (3x^2-4)\sqrt{x^2+1} + (x^3-4x) \times \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= (3x^2-4)\sqrt{x^2+1} + (x^3-4x) \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \boxed{(3x^2-4x)\sqrt{x^2+1} + \frac{(x^3-4x)x}{\sqrt{x^2+1}}}$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2-4x)\sqrt{x^2+1}^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^4-4x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{(3x^2-4x)(x^2+1) + x^4 - 4x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4+3x^2-4x^3-4x+x^4-4x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

donc on peut écrire une autre réponse :

$$\boxed{f'(x) = \frac{4x^4-4x^3-x^2-4x}{\sqrt{x^2+1}}}$$

EX.2

$$f(x) = \frac{x-4}{x+1} \quad ; \quad I =]-1;+\infty[$$

1°/ Tableau de variation de f :

on a : $f'(x) = \frac{(x-4)'(x+1) - (x-4)(x+1)'}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{x+1-(x-4)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x+1-x+4}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2} > 0$$

donc f est strictement ↗ sur I.

x	-1	$+\infty$
f	‖	↗ 1

avec : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-4}{x+1}$.

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = \boxed{1}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x)$

x	-1
$x+1$	$-$ ‖ $+$

$$= \lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} \frac{x-4}{x+1} = \text{"}\frac{-1-4}{0^+}\text{"} = \text{"}\frac{-5}{0^+}\text{"} = \boxed{-\infty}$$

2°/ f est continue et ↗ sur $I =]0+\infty[$ donc :

$f(]-1;0]) =]\lim\limits_{-1^+} f ; f(0)] =]-\infty;-4]$

(car $f(0) = \frac{0-4}{0+1} = -4$)

Scanné avec CamScanner

$$f([0;+\infty[) = [f(0); \lim_{x\to+\infty} f(x)[$$
$$= [-4; 1[$$

3°/ f est une fonction rationnelle définie sur I donc :

f est continue sur I

f est strictement ↗ sur I donc :

f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$.

4°/ f est strictement ↗ sur I donc f^{-1} est str ↗ sur J donc :

x	$-\infty$		1
f^{-1}	-1	↗	$+\infty$

avec : $J = f(]-1;+\infty[)$

$$=]\lim_{x\to-1} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)[$$
$$=]-\infty; 1[$$

5°/ Soient $x \in J$ et $y \in I$ on a :

$$f^{-1}(x) = y \iff x = f(y)$$
$$\iff x = \frac{y-4}{y+1}$$
$$\iff x(y+1) = y-4$$
$$\iff xy + x = y - 4$$
$$\iff xy - y = -x - 4$$
$$\iff y(x-1) = -x-4$$
$$\iff y = \frac{-x-4}{x-1} = \frac{x+4}{-x+1}$$

donc : $(\forall x \in J)$: $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{-x+1}$

— * fin * —

Scanné avec CamScanner